MEDIDA Y PROBABILIDAD

Miguel Ángel García Álvarez

Medida generada por una función de distribución

Definición 1. *Diremos que una función* $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *no decreciente y continua por la derecha tal que* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *es una* ***función de distribución****.*

Dada una función de distribución F, definamos $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

Denotemos por $\mathcal{H}$ a la familia de conjuntos formada por el vacío y los intervalos de la forma $(a, b]$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, y los de la forma (a, ∞), donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Para trabajar de manera más cómoda con los intervalos en $\mathcal{H}$ vamos a utilizar la notación $(a, b|$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$, para designar a un intervalo, de acuerdo con la siguiente convención:

$$(a, b| = \begin{cases} (a, b] & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ (a, b) & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

De esta forma, $\mathcal{H}$ es la familia de conjuntos formada por el vacío y los intervalos de la forma $(a, b|$.

La idea ahora consiste en que, mediante la función F, podemos definir una quasi medida μ_0 sobre el álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ generada por $\mathcal{H}$.

Para un intervalo $(a, b| \in \mathcal{H}$, definamos:

$$\mu_0((a, b|) = F(b) - F(a)$$

Definamos además, $\mu_0(\emptyset) = 0$.

Obsérseve que la familia $\mathcal{H}$ no forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, pero la familia $\mathcal{A}$ formada por el vacío y los conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ e $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos en $\mathcal{H}$, ajenos por parejas, sí forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Para cada $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{A}$, definamos:

$$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j)$$

Queremos aplicar el teorema de extensión de Carathéodory para obtener una medida definida sobre una σ-álgebra y que sea una extención de μ_0. Para eso, necesitamos demostrar que μ_0 es una quasi medida; es decir, que es no negativa, finitamente aditiva y σ-subaditiva.

Demostremos primero que la función $\mu_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ está bien definida.

Para mostrar que está bien definida hay que demostrar que si $I_1, \ldots, I_n$ e $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son dos colecciones finitas de intervalos en $\mathcal{H}$ tales que $I_1, \ldots, I_n$ son ajenos por parejas, $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son ajenos por parejas y $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = \bigcup_{k=1}^{m} I^{(k)}$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_0\left(I_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu_0\left(I^{(k)}\right)$$

Para esto demostremos el siguiente lema:

Lema 1. *Sea $J \in \mathcal{H}$ y $J_1, J_2, \ldots, J_r$ una colección finita de elementos en $\mathcal{H}$, ajenos por parejas, tal que $J = \bigcup_{i=1}^{r} J_i$, entonces:*

$$\mu_0\left(J\right) = \sum_{i=1}^{r} \mu_0\left(J_i\right)$$

Demostración

Sean a y b los extremos del intervalo J y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, sean a_i y b_i los extremos del intervalo J_i.

Ordenando, del menor al mayor, los elementos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_r, b_r$ obtenemos una colección de intervalos en $\mathcal{H}$, ajenos por parejas, $J^{(1)}, \ldots, J^{(r)}$, con extremos $c^{(1)}, d^{(1)}; c^{(2)}, d^{(2)}; \ldots; c^{(r)}, d^{(r)}$, respectivamente, de tal forma que:

$$a = c^{(1)} < d^{(1)} = c^{(2)} < d^{(2)} = c^{(3)} < \cdots = c^{(r)} < d^{(r)} = b$$

Obsérvese que cada intervalo J_i ($i \in \{1, 2, \ldots, r\}$) es alguno de los intervalos $J^{(k)}$ ($k \in \{1, 2, \ldots, r\}$).

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_0\left(J_i\right) = \sum_{k=1}^{r} \mu_0\left(J^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{r} \left[F\left(d^{(k)}\right) - F\left(c^{(k)}\right)\right] = F\left(b\right) - F\left(a\right) = \mu_0\left(J\right)$$

∎

Sean ahora $I_1, \ldots, I_n$ e $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ dos colecciones finitas de intervalos en $\mathcal{H}$ tales que $I_1, \ldots, I_n$ son ajenos por parejas, $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son ajenos por parejas y $\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{k=1}^m I^{(k)}$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $k \in \{1, \ldots, m\}$, definamos $I_j^{(k)} = I_j \cap I^{(k)}$. Entonces, como $\bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{k=1}^m I^{(k)}$, se tiene $I_j = \bigcup_{k=1}^m I_j^{(k)}$ e $I^{(k)} = \bigcup_{j=1}^n I_j^{(k)}$; así que:

$$\mu_0 (I_j) = \sum_{k=1}^m \mu_0 \left(I_j^{(k)} \right)$$

$$\mu_0 \left(I^{(k)} \right) = \sum_{j=1}^n \mu_0 \left(I_j^{(k)} \right)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^n \mu_0 (I_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \mu_0 \left(I_j^{(k)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_0 \left(I_j^{(k)} \right) = \sum_{k=1}^m \mu_0 \left(I^{(k)} \right)$$

Así que μ_0 está bien definida.

Evidentemente μ_0 es no negativa y finitamente aditiva.

Demostremos ahora que μ_0 es σ-subaditiva.

Para esto, inmediatamente después del siguiente lema, vamos a probar el teorema que establece el resultado central que permite demostrar la σ-subaditividad de μ_0.

Lema 2. *Sea I un intervalo en $\mathcal{H}$ y $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(m)}$ una colección finita de intervalos en $\mathcal{H}$ tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^m I^{(j)}$, entonces:*

$$\mu_0 (I) \leq \sum_{j=1}^m \mu_0 \left(I^{(j)} \right)$$

Demostración

Sean a y b los extremos del intervalo I y, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sean $a^{(j)}$ y $b^{(j)}$ los extremos del intervalo $I^{(j)}$.

Los puntos $a, b, a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(m)}, b^{(m)}$ constituyen una partición de un intervalo de extremos c y d que contiene al intervalo I.

Esa partición parte cada intervalo $I^{(j)}$, con $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, en subintervalos ajenos por parejas, $I_1^{(j)}, \dots, I_{n_j}^{(j)}$. Así que:

$$\mu_0\left(I^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{n_j} \mu_0\left(I_k^{(j)}\right)$$

La partición definida antes también parte el intervalo I en subintervalos ajenos por parejas, $I_1, \dots, I_n$. Así que:

$$\mu_0(I) = \sum_{k=1}^{n} \mu_0(I_k)$$

Por otra parte, como $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, cada intervalo I_k, con $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, coincide con un intervalo $I_{k'}^{(j)}$ para alguna $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ y alguna $k' \in \{1, 2, \dots, n_j\}$, por lo tanto:

$$\mu_0(I) = \sum_{k=1}^{n} \mu_0(I_k) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \mu_0\left(I_k^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right)$$

∎

Teorema 1. *Sea I un intervalo en $\mathcal{H}$ e $I_1, I_2, \dots$ una colección infinita de intervalos en $\mathcal{H}$ tales que $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Entonces:*

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

donde a y b son los extremos del intervalo I y, para cada $k \in \mathbb{N}$, a_k y b_k son los extremos del intervalo I_k.

Demostración

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, arbitrarios.

Como F es continua por la derecha, para cada cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta_k > 0$ tal que:

$$F(d_k) - F(b_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

donde:

$$d_k = \begin{cases} b_k + \delta_k & \text{si } b_k \in \mathbb{R} \\ b_k & \text{si } b_k = \infty \end{cases}$$

Definamos:

$$c_\delta = \begin{cases} a + \delta & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\delta} & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

$$d_\delta = \begin{cases} b & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\delta} & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Entonces:

$$\text{lím}_{\delta \to 0} \left[F\left(d_\delta\right) - F\left(c_\delta\right) \right] = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

Además:

$$\left(c_\delta, d_\delta\right| \subset \left[c_\delta, d_\delta\right] \subset I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_k, d_k\right)$$

Así que, por el teorema de Heine-Borel, existe una colección finita, $\left(a_{k_1}, d_{k_1}\right), \dots, \left(a_{k_m}, d_{k_m}\right)$, tal que:

$$\left[c_\delta, d_\delta\right] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left(c_\delta, d_\delta\right| \subset \left[c_\delta, d_\delta\right] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right|$$

Así que:

$$F\left(d_\delta\right) - F\left(c_\delta\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \left[F\left(d_{k_j}\right) - F\left(a_{k_j}\right) \right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F\left(d_k\right) - F\left(a_k\right) \right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right) \right] + \varepsilon$$

Y, como $\varepsilon > 0$ es arbitraria:

$$F\left(d_\delta\right) - F\left(c_\delta\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right) \right]$$

Finalmente, tomando límites cuando $\delta \to 0$, se obtiene:

$$F\left(b\right) - F\left(a\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right) \right]$$

■

Teorema 2. μ_0 *es* σ*-subaditiva*

Demostración

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, no vacíos y tales que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, A_i es una unión finita de intervalos en $\mathcal{H}$ ajenos por parejas. Además, como $A \in \mathcal{A}$, A también es una unión finita de intervalos en $\mathcal{H}$ ajenos por parejas.

Sean $A = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}$. Entonces:

$$\bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)} = A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}$$

Tenemos dos colecciones de intervalos, por un lado la familia $\left\{I_{(i,k)} : i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$ y por el otro la familia $\left\{I^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}\right\}$. Tanto los intervalos de la primera familia como los de la segunda son ajenos por parejas y A es igual tanto a la unión de los intervalos de la primera familia como de la segunda. Por otra parte, una pareja de intervalos, uno de la primera familia y otro de la segunda, podrían no ser ajenos.

La idea ahora es partir cada intervalo $I^{(j)}$ en intervalos ajenos por parejas, utilizando los intervalos $I_{(i,k)}$. Para esto, definamos, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$:

$$I_{(i,k)}^{(j)} = I_{(i,k)} \cap I^{(j)}$$

Entonces, los intervalos de la familia

$$\left\{I_{(i,k)}^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}, i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$$

son ajenos por parejas y:

$I_{(i,k)} = \bigcup_{j=1}^{m} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualesquiera $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$.

$I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Además, por el teorema 1, se tiene:

$\mu_0\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_0\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Así que:

$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_0\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_0\left(I_{(i,k)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$

Además, como μ_0 es finitamente aditiva y $A \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu_0(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\mu_0(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$$

Por lo tanto, $\mu_0(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$, así que μ_0 es σ-aditiva y, por lo tanto, σ-subaditiva.

■

Por lo anterior, la función $\mu_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es una quasi medida; de manera que podemos aplicar el teorema de extensión de Carathéodory para obtener una medida μ definida sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida μ_0 cero de tal manera que μ sea una extensión de μ_0.

La medida μ que se obtiene será llamada la **medida generada por la función de distribución** F.